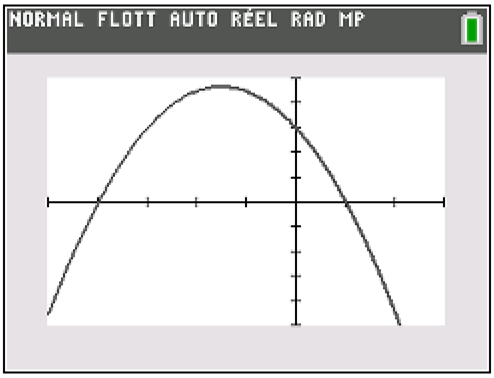
$1^{ère}$ Maths CS1 09 oct. 2023 55 min Calculatrice en mode Exam Thiaude P.

NOM = Prénom =



<u>Exercice 1</u> [2 pts] Q.C.M.

On donne ci-contre la parabole représentative d'une certaine fonction f polynôme du second degré :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c.$

Par lecture graphique et sans justification indiquer pour chacun des points suivants l'unique bonne réponse.

- ☐ $c = -4$ ☐ $c = 3$ ☐ $c \in \{-4; 1\}$ ☐ on ne peut pas savoir
- ☐ $b^2 < 12a$ ☐ $b^2 = 12a$ ☐ $b^2 > 12a$ ☐ on ne peut pas savoir
- solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ sont :
  ☐ -4 et 1 ☐ 3 ☐ il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$
- l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) < 0$ est :
  ☐ $]-4; 1[$ ☐ $[-4; 1]$ ☐ $]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$ ☐ autre

<u>Exercice 2</u> [1 pt] démonstration du cours

L'expression du second degré $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ possède deux racines réelles distinctes : rappeler et démontrer la formule donnant le produit des racines.

<u>Exercice 3</u> [2 pts] une équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x(x+2) - 6 = 0$.

<u>Exercice 4</u> [4 pts] une inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x(-3x+1) \geqslant 2x - 10$.

<u>Exercice 5</u> [4 pts] sens de variation

Pour tout réel x on pose $f(x) = (-2x+5)(x-7)$.

1. Développer $f(x)$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, en déduire que $f(x)$ admet une valeur maximale et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x elle est atteinte. *(résultats sous forme décimale)*

<u>Exercice 6</u> [3 pts] un peu de recherche

Pour tout réel x on pose : $f(x) = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$. Un élève affirme que « pour tout réel x le nombre $f(x)$ est supérieur ou égal à 2 ». Si vous pensez que cette affirmation est vraie, la démontrer, sinon trouver un contre-exemple.

<u>Exercice 7</u> [4 pts] avec un paramètre m

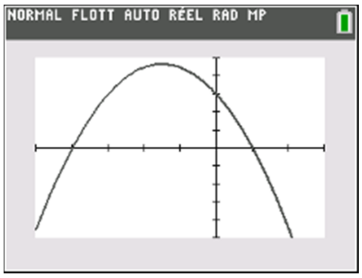
Soit m un paramètre réel, on considère l'équation (E) d'inconnue réelle x :

$$(m^2+3)x^2 + (3m+1)x + 1 = 0$$

1. Dans cette question, on suppose $m = -2$: résoudre l'équation (E).
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation (E) admet-elle exactement une solution ?

Corrigé

Exercice 1



$f(x) = ax^2 + bx + c$

- ☒ $c = 3$

  $f(0) = c$, or par lecture graphique $f(0) = 3$, donc $c = 3$.
- ☒ $b^2 > 12a$

  $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points donc l'équation $f(x) = 0$ a deux racines réelles distinctes, ce qui équivaut à dire que $\Delta > 0$.

  Or $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a \times 3 = b^2 - 12a$, donc : $b^2 - 12a > 0$ qui s'écrit aussi $b^2 > 12a$.
- La (les) solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ est(sont) : ☒ -4 et 1

  Les solutions de $f(x) = 0$ sont les valeurs lues sur l'axe des abscisses en lesquelles $\mathcal{C}_f$ coupe cet axe, on dit aussi que ce sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
- L'ensemble solution de $f(x) < 0$ est : ☒ $]-\infty; -4[\, \cup \,]1; +\infty[$

  La position relative de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses donne le signe de $f(x)$.

Exercice 2

L'expression du second degré $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ possède deux racines réelles distinctes.
Rappeler puis démontrer la formule donnant le produit des racines.

En notant x_1 et x_2 les deux racines, on a : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

D'où :

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{4a \times c}{4a \times a} = \frac{c}{a}$$

Le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x(x+2) - 6 = 0$.

L'équation : $x(x+2) - 6 = 0$ s'écrit aussi : $x^2 + 2x - 6 = 0$.

L'expression $x^2 + 2x - 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -6$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-6) = 4 + 24 = 28$

$\Delta > 0$ donc l'expression $x^2 + 2x - 6 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.

Remarquons que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$.

On a :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{7}}{2(1)} = \frac{2(-1-\sqrt{7})}{2 \times 1} = -1-\sqrt{7}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{7}}{2(1)} = \frac{2(-1+\sqrt{7})}{2 \times 1} = -1+\sqrt{7}$$

Conclusion

L'équation $x(x+2) - 6 = 0$ admet pour solutions dans $\mathbb{R}$: $-1-\sqrt{7}$ et $-1+\sqrt{7}$.

Autre méthode (astucieuse)

$x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2 - 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1+\sqrt{7})(x+1-\sqrt{7}) = 0 \Leftrightarrow x+1+\sqrt{7} = 0 \text{ ou } x+1-\sqrt{7} = 0$

$\Leftrightarrow x = -1-\sqrt{7} \text{ ou } x = -1+\sqrt{7}$

L'équation $x(x+2) - 6 = 0$ admet pour solutions dans $\mathbb{R}$: $-1-\sqrt{7}$ et $-1+\sqrt{7}$.

<u>Exercice 4</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\boldsymbol{x(-3x+1) \geqslant 2x-10}$.

On a les équivalences : $x(-3x+1) \geqslant 2x-10 \Leftrightarrow -3x^2+x \geqslant 2x-10 \Leftrightarrow -3x^2+x-2x+10 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow -3x^2-x+10 \geqslant 0$.

$-3x^2-x+10$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-3$, $b=-1$ et $c=10$, de discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4(-3)(10) = 1+120 = 121$

On constate que $\Delta > 0$ donc $-3x^2-x+10$ a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1-\sqrt{121}}{2(-3)} = \frac{1-11}{-6} = \frac{-10}{-6} = +\frac{5}{3}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1+\sqrt{121}}{2(-3)} = \frac{1+11}{-6} = \frac{12}{-6} = -2$$

<u>Règle</u> : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x^2-x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de $-3x^2-x+10 \geqslant 0$ est $\boldsymbol{\left[-2\,;\frac{5}{3}\right]}$ et c'est aussi l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ.

<u>Exercice 5</u>

Pour tout réel $\boldsymbol{x}$,on pose $\boldsymbol{f(x) = (-2x+5)(x-7)}$.

1. **Développer $\boldsymbol{f(x)}$.**
   $f(x) = (-2x+5)(x-7) = -2x^2+14x+5x-35 = -2x^2+19x-35$
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f(x) = -2x^2+19x-35}$ (forme développée)

2. **Étudier les variations de $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$, en déduire que $\boldsymbol{f(x)}$ admet une valeur maximale et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de $\boldsymbol{x}$ elle est atteinte. On donnera la forme décimale de ces nombres**.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2+19x-35$.
   L'expression $-2x^2+19x-35$ est de la forme ax^2+b+c avec $a=-2$, $b=19$ et $c=-35$.
   On a :
   $$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-19}{2(-2)} = +\frac{19}{4} = 4{,}75$$
   $$\beta = f(\alpha) = f(4{,}75) = -2(4{,}75)^2+19(4{,}75)-35 = 10{,}125$$
   $a=-2$, $a<0$ donc :
   $f \nearrow$ sur $]-\infty;\alpha]$ c'est-à-dire sur $]-\infty;4{,}75]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ c'est-à-dire sur $[4{,}75;+\infty[$.
   donc $f(x)$ atteint sa valeur maximale $10{,}125$ pour $x=4{,}75$ (uniquement).
   On peut aussi faire le tableau de variation de f avant de conclure même si ce n'est pas, ici, obligatoire.

<u>Exercice 6</u>

Pour tout réel $\boldsymbol{x}$, on pose : $\boldsymbol{f(x) = x^2+(x+1)^2+(x+2)^2}$. Un élève affirme : « pour tout réel $\boldsymbol{x}$, le nombre $\boldsymbol{f(x)}$ est supérieur ou égal à 2 ». Si vous pensez que cette affirmation est vraie la démontrer, sinon trouver un contre-exemple.

Développons : $f(x) = x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 = x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4 = 3x^2+6x+5$.
Pour tout réel x, $f(x) = 3x^2+6x+5$ (forme développée).

<u>Première méthode</u>

L'expression $3x^2+6x+5$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=3$, $b=6$ et $c=5$. On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(3)} = -\frac{6}{6} = -1$$

$a=3$, $a>0$ donc $f \searrow$ sur $]-\infty;\alpha]$ i.e. $]-\infty\,;\,-1]$ et $f \nearrow$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, i.e. $[-1\,;\,+\infty[$.

On en déduit que la valeur minimale de f est $f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2$.
L'affirmation de l'élève est donc vraie.
On peut aussi faire le tableau de variation de f avant de conclure même si ce n'est pas, ici, obligatoire.

Deuxième méthode (astucieuse)

Pour démontrer une relation d'ordre entre $A(x)$ et $B(x)$ on peut étudier le signe de leur différence.
Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
&f(x) - 2 \ \text{(c'est la différence)}\\
&= x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 - 2\\
&= x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - 2\\
&= 3x^2 + 6x + 3\\
&= 3(x^2 + 2x + 1)\\
&= 3[(x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2]\\
&= 3(x+1)^2
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2 = 3(x+1)^2$. Or, un carré est toujours positif ou nul donc, pour tout réel x : on a : $(x+1)^2 \geqslant 0$, puis comme $3 > 0$ on en déduit que : $3(x+1)^2 \geqslant 0$ c'est-à-dire : $f(x) - 2 \geqslant 0$, autrement dit : $f(x) \geqslant 2$. Pour tout réel x, on a : $f(x) \geqslant 2$, donc l'**affirmation de l'élève est vraie**.

Exercice 7

Soit m un paramètre réel, (E) d'inconnue réelle x : $(m^2+3)x^2 + (3m+1)x + 1 = 0$.

1. **Dans cette question, on suppose $m = -2$: résoudre l'équation (E).**
   Pour $m = -2$ l'équation (E) devient : $((-2)^2 + 3)x^2 + (3(-2)+1)x + 1 = 0$, c'est-à-dire : $7x^2 - 5x + 1 = 0$, qui est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 7, b = -5$ et $c = 1$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(7)(1) = 25 - 28 = -3$.
   On constate que $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle.

2. **Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation (E) admet-elle exactement une solution ?**
   Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $m^2 + 3 \neq 0$ donc (E) est toujours une équation du second degré.
   L'expression $(m^2+3)x^2 + (3m+1)x + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = m^2 + 3\ (\neq 0)$, $b = 3m + 1$ et $c = 1$, de discriminant :
   $$\begin{aligned}\Delta_m &= b^2 - 4ac = (3m+1)^2 - 4(m^2+3)(1) = (3m)^2 + 2(3m)(1) + 1^2 - 4m^2 - 12\\ &= 9m^2 + 6m + 1 - 4m^2 - 12 = 5m^2 + 6m - 11\end{aligned}$$
   L'équation (E) admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est nul.
   Or, l'expression $5m^2 + 6m + 1$ est de la forme $a'm^2 + b'm + c'$ avec $a' = 5$, $b' = 6$ et $c' = -11$, de discriminant : $\Delta = b'^2 - 4a'c' = 6^2 - 4(5)(-11) = 36 + 220 = 256$.
   On constate que $\Delta > 0$ donc $5m^2 + 6m + 1$ admet deux racines réelles distinctes :
   $$m_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{2a'} = \frac{-6 - \sqrt{256}}{2(5)} = \frac{-6 - 16}{10} = \frac{-22}{10} = -\frac{11}{5}$$
   $$m_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{256}}{2(5)} = \frac{-6 + 16}{10} = \frac{10}{10} = 1$$
   Conclusion
   (E) admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\boldsymbol{m = -\frac{11}{5}}$ ou $\boldsymbol{m = 1}$.